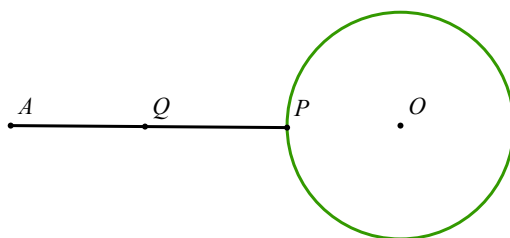


第2讲 瓜豆原理与费马点问题

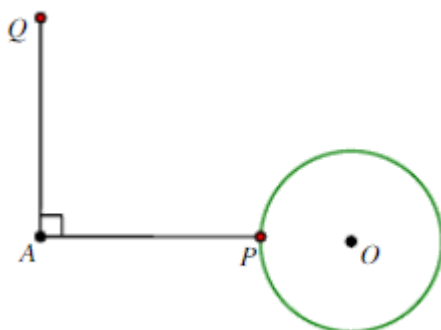
一、瓜豆原理

1. 轨迹为圆

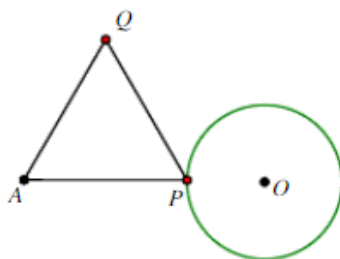
思考一：如图， P 为 $\odot O$ 上一动点， A 为定点，连接 AP ， Q 为 AP 中点，则点 Q 的轨迹是？



思考二：如图， P 是 $\odot O$ 上一动点， A 为定点，连接 AP ，作 $AQ \perp AP$ 且 $AQ = AP$ ，则点 Q 运动的轨迹是？



思考三：如图， P 是 $\odot O$ 上一动点， A 为定点，连接 AP ，以 AP 为一边作等边 $\triangle APQ$ ，则点 Q 的轨迹是？

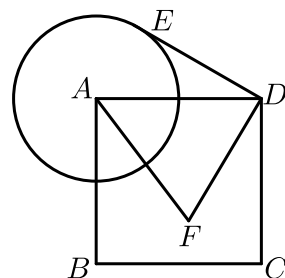


！ 总结：瓜豆原理两个必要条件：两个变量

①主动点、从动点到定点的距离是定值

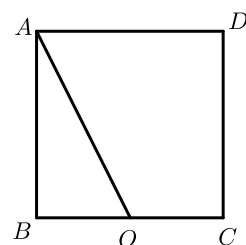
②主动点、从动点与定点连线的夹角是定角

1. 如图，已知正方形 $ABCD$ 的边长为2，以点 A 为圆心，1为半径作圆， E 是 $\odot A$ 上的任意一点，将点 E 绕点 D 按逆时针方向旋转 90° 得到点 F ，则线段 AF 的长的最小值 _____ .



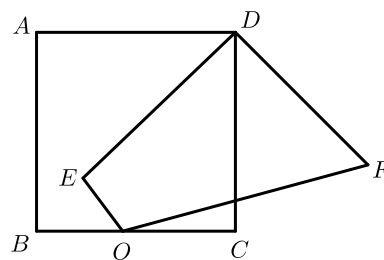
2. 已知正方形 $ABCD$ 的边长为6， O 是 BC 边的中点.

(1) 如图①，连接 AO ，则 AO 的长为 _____ .



图①

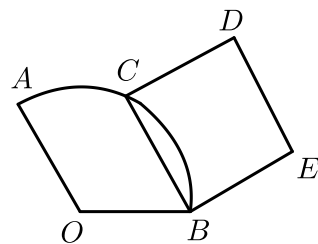
(2) 如图②，点 E 是正方形内一动点， $OE = 2$ ，连接 DE ，将线段 DE 绕点 D 逆时针旋转 90° 得 DF ，则线段 OF 长的最小值为 _____ .



图②

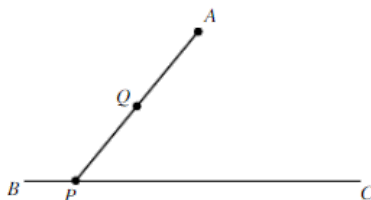
栗子二

3. 如图，已知扇形 AOB 中， $OA = 3$ ， $\angle AOB = 120^\circ$ ， C 是 $\widehat{AB}$ 的动点，以 BC 为边作正方形 $BCDE$ ，当点 C 从点 A 移动到点 B 时，点 D 经过的路径长是_____。

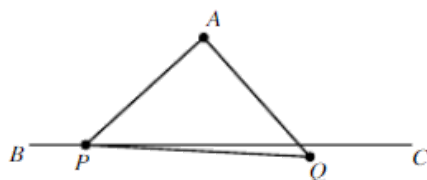


2. 轨迹为直线

思考一：如图， P 是直线 BC 上一动点，连接 AP ，取 AP 中点 Q ，在点 P 运动的过程中， Q 点轨迹是？

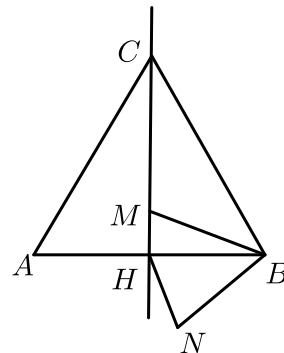


思考二：如图， $\triangle APQ$ 是等腰直角三角形， $\angle PAQ = 90^\circ$ 且 $AP = AQ$ ，在点 P 运动的过程中， Q 点的轨迹是？

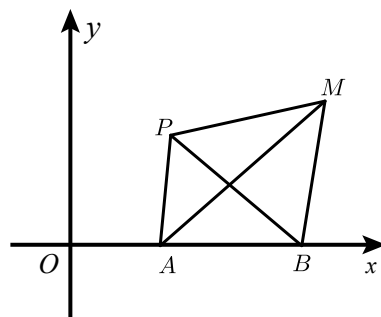


栗子三

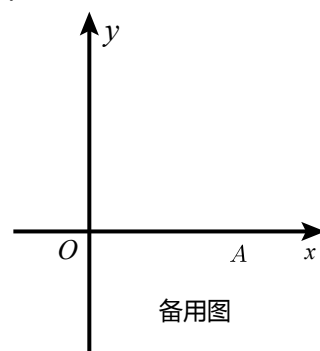
4. 如图，在边长为 $2a$ 的等边 $\triangle ABC$ 中， M 是高 CH 所在直线上的一个动点，连接 BM ，将线段 BM 绕点 B 逆时针旋转 60° 得到 BN ，连接 HN ，则在点 M 运动的过程中，线段 HN 长度的最小值为_____。



5. 如图，在平面直角坐标系中，已知 $A(2,0)$ ，点 P 为线段 AB 外一动点，且 $PA = OA$ ，点 B 为 x 轴上一点．现在以 B 为中心，将 PB 顺时针旋转 60° 至 BM ，连接 PM ．

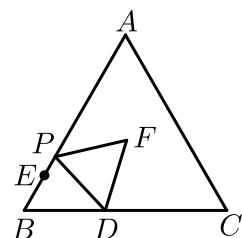


- (1) 求证： $\triangle PBM$ 为等边三角形．
 (2) 当 $PA \perp x$ 轴， $B(2 + 2\sqrt{3}, 0)$ 时，求 AM 的长．
 (3) 当点 B 的坐标为 $(5, 0)$ 时，求线段 AM 的最大值（直接写出结果即可）



栗子四

6. 如图，在等边 $\triangle ABC$ 中， $AB = 10$ ， $BD = 4$ ， $BE = 2$ ，点 P 从点 E 出发沿 EA 方向运动，连接 PD ，以 PD 为边，在 PD 的右侧按如图所示的方式作等边 $\triangleDPF$ ，当点 P 从点 E 运动到点 A 时，点 F 运动的路径长是 _____ ．



二、费马点问题

1. 费马点定义

费马点：位于三角形_____且到三角形三个顶点_____的点.

若给定一个三角形 $\triangle ABC$ 的话，从这个三角形的费马点 P 到三角形的三个顶点 A 、 B 、 C 的距离之和比从其它点算起的都要小；这个特殊点对于每个给定的三角形都只有_____个.

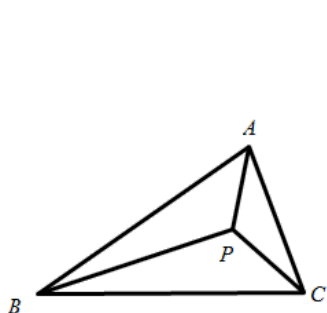
2. 费马点的结论及证明

结论：

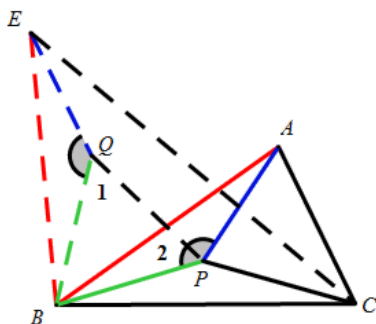
1、费马点到三角形三个顶点的距离之和_____

2、费马点连接三顶点所成的夹角皆为_____

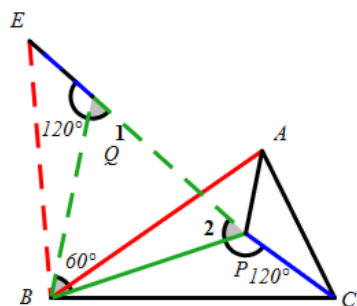
证明：



图一



图二



图三

如图一，在_____内任取一点_____，连接_____、_____、_____。

如图二，将_____绕点_____旋转_____得到 $\triangle EQB$ ，则_____ $\cong$ _____。

连接_____， $\therefore$ _____，_____，_____。

$\therefore$ _____是_____三角形，则_____，_____。

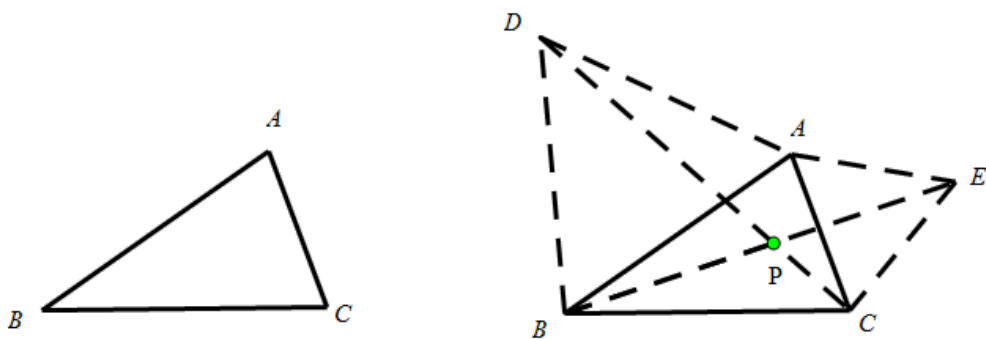
$\therefore$ _____。

如图三，当且仅当_____、_____、_____、_____四点_____时取等号，此时_____ = _____。

$\therefore$ _____，_____取到最小值_____。

$\therefore$ 点_____是_____的费马点，且点_____到三角形三个顶点的距离之和最小。

3. 费马点的构造



作法：

以 $\triangle ABC$ 的任意两边为边分别向外做等边三角形，即以 AB 为边向外作等边三角形 ABD ，以 AC 为边作等边三角形 ACE ，连接 DC 、 BE 交于 P ，则 P 即为所求的费马点.

栗子五

7. 模型结论：如图1，正 $\triangle ABC$ 内接于 $\odot O$ ，点 P 是劣弧 AB 上一点，可推出结论 $PA + PB = PC$.

应用迁移：如图2，在 $\text{Rt}\triangle EDG$ 中， $\angle EDG = 90^\circ$ ， $DE = 3$ ， $DG = 2\sqrt{3}$ ， F 是 $\triangle DEG$ 内一点，则点 F 到 $\triangle DEG$ 三个顶点的距离和的最小值为()

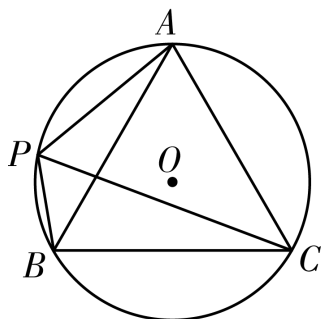


图1

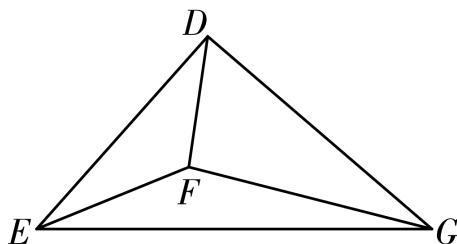


图2

A. $\sqrt{17}$

B. 5

C. $3\sqrt{3}$

D. $\sqrt{39}$

8. 如图， P 为正方形 $ABCD$ 对角线 BD 上一动点，若 $AB = 2$ ，则 $AP + BP + CP$ 的最小值为 _____ .

